УДК 539.3

В. В. Стружанов

ОПТИМАЛЬНЫЕ ОСТАТОЧНЫЕ НАПРЯЖЕНИЯ ПРИ ЖЕСТКОМ НАГРУЖЕНИИ УПРУГОГО ТЕЛА

В развитие полученных ранее результатов [1] приводится решение задачи об определении такого поля остаточных (собственных) напряжений, которое в наперед заданной области упругого тела, находящегося в условиях жесткого нагружения, ослабляет действие напряжений от внешних усилий.

Аналогично [1] можно сформулировать следующую задачу оптимизации: для заданных кинематических условий на границе упругого тела (жесткое нагружение) найти такие остаточные (собственные) напряжения, которые, складываясь с напряжениями от нагрузки, позволяют в отдельных областях тела получить напряженное состояние, сколь угодно близкое к нулю.

1. Постановка задачи

Рассмотрим упругое тело V, ограниченное достаточно гладкой поверхностью Γ. Зададим точкам части границы Γ_1 перемещения, определяемые вектором $v(y), y \in \Gamma_1$. Оставшаяся часть границы Γ_2 свободна от напряжений. Напряженно-деформированное состояние в теле находится из решения краевой задачи

$$\nabla \cdot \sigma = 0, \quad \varepsilon = def\ u, \quad \sigma = C \cdot \cdot \varepsilon, \quad u|_{\Gamma_1} = v, \quad \sigma \cdot n|_{\Gamma_2} = 0. \tag{1.1}$$

Здесь первая группа уравнений – уравнения равновесия, вторая – соотношения Коши, третья – закон Гука [2]; σ, ε – симметричные тензоры второго ранга напряжений и деформаций соответственно; u – вектор перемещений внутренних точек тела V; n – единичный вектор внешней нормали к поверхности Γ; C – симметричный тензор четвертого ранга модулей упругости; двумя точками обозначено двойное скалярное произведение тензоров [2].

Если теперь в теле возникнет поле первоначальных несовместных деформаций [1], заданное симметричным несовместным тензором второго ранга $\varepsilon^*(x)$ $(x \in V)$, то появятся дополнительные самоуравновешенные напряжения [1]. Для их определения необходимо решить краевую задачу

$$\nabla \cdot q'' = 0,\ e = def\ u,\ q'' = C \cdot \cdot (e - \varepsilon^*),\ u|_{\Gamma_1} = 0,\ q'' \cdot n|_{\Gamma_2} = 0. \tag{1.2}$$

Здесь q'', e – симметричные тензоры второго ранга напряжений и деформаций.

Согласно принципу суперпозиции напряженное состояние в теле задано теперь суммой тензоров $\sigma(x) + q''(x),\ x \in V$.

Будем считать, что тензор $q''(x)$ оптимизирует напряженное состояние в упругом теле, если в некоторой наперед заданной области $V_1 \subset V$ имеет место равенство

$$\varkappa(x)q''(x) + \varkappa(x)\sigma(x) = 0, \quad \varkappa(x) = \{1, x \in V_1;\ 0, x \notin V_1\}. \tag{1.3}$$

Тогда задача оптимизации формулируется следующим образом: требуется найти поле первоначальных деформаций, при реализации которого возникнут такие дополнительные напряжения, что в области V_1 будет выполняться равенство (1.3).

2. Свойства основных уравнений

В основу дальнейших рассуждений положим энергетическое гильбертово пространство T, состоящее из всевозможных симметричных тензоров напряжений, определенных в V [3]. Скалярное произведение и норма в нем заданы формулами

$$(p_1, p_2) = \int_V p_1 \cdot \cdot S \cdot \cdot p_2 dV, \quad \|p\|^2 = (p, p), \quad p, p_1, p_2 \in T.$$

Здесь S – тензор модулей податливости ($S = C^{-1}$). Известно [3], что пространство T является ортогональной суммой следующих подпространств:

$$T_1 = \{p' : e' = S \cdot \cdot p', Jnk\ e' = 0\}, \quad T_2 = \{\sigma'' : \nabla \cdot \sigma'' = 0, \sigma'' \cdot n|_\Gamma = 0\},$$
$$D_1 = \{q' : Jnk\ S \cdot \cdot q' = 0, u|_{\Gamma_1} = 0\}, \quad D_2 = \{q'' : \nabla \cdot q'' = 0, q'' \cdot n|_{\Gamma_2} = 0\},$$

т. е. $T = T_1 + T_2$, $T = D_1 + D_2$. Здесь Jnk – оператор несовместности [2].

Итак, любой тензор $p \in T$ можно представить единственным образом суммой $p = p' + \sigma''$ или суммой $p = q' + q''$, где $p' \in T_1$, $\sigma'' \in T_2$, $(p', \sigma'') = 0$, $q' \in D_1$, $q'' \in D_2$, $(q', q'') = 0$, $p' = P_1 p, \sigma'' = P_2 p$, $q' = Q_1 p, q'' = Q_2 p$ [3]. Здесь P_1, P_2 – операторы ортогонального проектирования соответственно на подпространства T_1 и T_2, а Q_1, Q_2 – ортопроекторы соответственно на D_1 и D_2, причем $P_1 + P_2 = I$, $Q_1 + Q_2 = I$, где I – тождественный оператор.

Далее очевидно, что $T_2 \subset D_2$ и $D_1 \subset T_1$. Тогда [4] $Q_1 P_2 = P_2 Q_1 = 0$ (проекторы Q_1 и P_2 ортогональны, так как ортогональны подпространства D_1 и T_2) и, кроме того, имеют место равенства

$$P_1 Q_1 = Q_1,\ Q_1 P_1 = Q_1,\ Q_2 P_2 = P_2,\ P_2 Q_2 = P_2. \tag{2.1}$$

Эти равенства проверяются непосредственно. Например, $P_1Q_1 = (I - P_2)Q_1 = Q_1 - P_2Q_1 = Q_1$.

Отметим наконец, что элементами подпространства T_1 являются решения краевой задачи

$$\nabla \cdot p' = f,\ e' = def\ u,\ p' = C \cdot \cdot e',\ p' \cdot n|_\Gamma = t \tag{2.2}$$

для всевозможных f и t ($f(x)$ – вектор объемных сил, $t(y)$ – вектор поверхностных сил); решения задачи

$$\nabla \cdot \sigma'' = 0,\ \varepsilon' = def\ u,\ \sigma'' = C \cdot \cdot (\varepsilon' - \varepsilon^*),\ \sigma'' \cdot n|_\Gamma = 0 \tag{2.3}$$

для всевозможных тензоров $\varepsilon^*(x)$ являются элементами подпространства T_2; решения краевой задачи

$$\nabla \cdot q' = f,\ e' = def\ u,\ q' = C \cdot \cdot e',\ u|_{\Gamma_1} = 0,\ q' \cdot n|_{\Gamma_2} = t$$

для всевозможных f и t входят в подпространство D_1, а решения задачи

$$\nabla \cdot q'' = 0,\ \varepsilon' = def\ u,\ q'' = C \cdot \cdot (\varepsilon' - \varepsilon^*),\ u|_{\Gamma_1} = v,\ q'' \cdot n|_{\Gamma_2} = 0$$

для всевозможных ε^* и v входят в подпространство D_2. Очевидно, что решения задач (1.1) и (1.2) принадлежат подпространству D_2.

Найдем теперь общий вид решения системы (1.2). Задачу будем решать в два этапа. Сначала запишем решение задачи (2.3). В работе [1] показано, что тензор напряжений здесь определяется выражением $\sigma'' = -P_2\sigma^* (\sigma^* = C \cdot\cdot \varepsilon^*)$, а совместные деформации и перемещения являются решениями уравнений (2.2) при $f = \nabla \cdot \sigma^*$, $t = \sigma^* \cdot n|_\Gamma$ (задача (A)), причем $p' = P_1\sigma^*$. Итак, получили напряженно-деформированное состояние в теле со свободной границей при заданном поле первоначальных деформаций.

Обозначим через w перемещения, которые получают при этом точки границы ($u|_\Gamma = w$). На втором этапе необходимо решить задачу (1.1) при граничных условиях $u|_{\Gamma_1} = -w$, $\sigma \cdot n|_{\Gamma_2} = 0$ (задача (B)) и затем наложить это решение на решение задачи (2.3).

Рассмотрим дополнительно систему

$$\nabla \cdot p'_w = \nabla \cdot \sigma^*,\ e' = def\ u,\ p'_w = C \cdot \cdot e',\ u|_{\Gamma_1} = w,\ p'_w \cdot n|_{\Gamma_2} = \sigma^* \cdot n|_{\Gamma_2}.$$

Эта задача совпадает с задачей (A), только на границе Γ_1 заданы перемещения, полученные при решении задачи (A). Следовательно, $p'_w = p' = P_1\sigma^*$. Из данного тензора p'_w вычтем тензор напряжений σ_w, удовлетворяющий системе (1.1) с граничными условиями $u|_{\Gamma_1} = w$, $\sigma_w \cdot n|_{\Gamma_2} = 0$. Тогда $p'_w - \sigma_w \in D_1$. Отсюда $p'_w = (p'_w - \sigma_w) + \sigma_w$, где $\sigma_w \in D_2$. Итак, имеет место разложение тензора p'_w на сумму элементов из подпространств D_1 и D_2. В силу единственности такого представления находим, что $\sigma_w = Q_2 p'_w = Q_2 P_1 \sigma^*$. Теперь решение задачи (B) определяется выражением $(-Q_2 P_1 \sigma^*)$.

Итак, искомое решение задачи (1.2) с учетом равенств (2.1) можно представить в виде

$$q'' = -P_2\sigma^* - Q_2 P_1 \sigma^* = -(I - P_1)\sigma^* - Q_2 P_1 \sigma^* = -\sigma^* + (I - Q_2) P_1 \sigma^* = \\ = -\sigma^* + Q_1 P_1 \sigma^* = -\sigma^* + Q_1 \sigma^* = -(I - Q_1)\sigma^* = -Q_2 \sigma^*. \qquad (2.4)$$

3. Метод решения задачи оптимизации

Следуя работе [1], перепишем уравнение (1.3) с учетом равенства (2.4) в виде $\varkappa Q_2 \sigma^* = \varkappa \sigma$. Подставляя сюда выражение $Q_2 = I - Q_1$, получаем операторное уравнение

$$\varkappa\sigma^* = \varkappa Q_1 \sigma^* + \varkappa\sigma.$$

Будем искать решение данного уравнения на множестве $\varkappa T$. Если $\sigma^* \in \varkappa T$, то $\varkappa\sigma^* = \sigma^*$ $(\varkappa\varkappa = \varkappa)$. Тогда окончательно

$$\sigma^* = \varkappa Q_1 \sigma^* + \varkappa\sigma. \qquad (3.1)$$

Оценим норму оператора $\varkappa Q_1$. Имеем $\|\varkappa Q_1\| \le \|\varkappa\| \cdot \|Q_1\|$. Известно [4], что $\|Q_1\| = 1$. Далее,

$$\|\varkappa p\|^2 = \int_V \varkappa p \cdot\cdot S \cdot\cdot \varkappa p dV = \int_{V_1} p \cdot\cdot S \cdot\cdot p dV < \int_V p \cdot\cdot S \cdot\cdot p dV = \|p\|^2.$$

Здесь $p \cdot\cdot S \cdot\cdot p$ – положительно определенная квадратичная форма, p – некоторый элемент из множества $M \subset T$, которое составляют тензоры, определенные в области V', где V' – любая область, входящая в Vили совпадающая с V, причем $V_1 \subset V'$. Тогда, рассматривая $\varkappa$ как оператор, действующий из $M \subset T$ в $\varkappa T$, получаем $\|\varkappa\| < 1$. Если же $\varkappa$ действует из $\varkappa T$ в $\varkappa T$, то $\|\varkappa\| = 1$. Очевидно, что оператор Q_1 отображает элементы из T в M, кроме элементов $\varkappa q' \in D_1$. Отсюда следует, что оператор $\varkappa Q_1$, определенный на множестве $\varkappa T \backslash (\varkappa T \cap D_1)$, имеет норму $\|\varkappa Q_1\| < 1$. Следовательно, он является оператором сжатия, и решение уравнения (3.1) представимо сходящимся рядом

$$\sigma^* = \sum_{n=0}^{\infty} (\varkappa Q_1)^n \varkappa\sigma. \qquad (3.2)$$

Наконец, искомое поле первоначальных деформаций определяется тензором $\varepsilon^* = S \cdot\cdot \sigma^*$.

Замечания: 1. Так как $Q_2(\sigma^* + q') = Q_2\sigma^*$, где q' – произвольный элемент из D_1, то любой тензор $\varepsilon = \varepsilon^* + \varepsilon'$, где $\varepsilon' = S \cdot \cdot q'$, также инициирует поле напряжений $q''(x)$, обладающее свойством (1.3).

2. Если в теле требуется создать заданное поле напряжений $q''(x)$, то поле первоначальных деформаций определяется тензором $\varepsilon^*(x) = \varepsilon''(x) + \varepsilon'(x)$, где $\varepsilon'' = S \cdot \cdot q''$, ε' – произвольный тензор совместных деформаций, которому отвечают перемещения, обращающиеся в нуль на границе Γ_1.

4. Пример

Пусть точкам границы тонкого круглого диска радиуса R заданы радиальные перемещения v. Требуется найти первоначальные деформации, вызывающие появление таких добавочных напряжений, которые в сумме с напряжениями от внешней нагрузки дают нулевое напряженное состояние в центральной зоне радиуса R_1.

Решения краевых задач (1.1) и (1.2) определяют соответственно формулы

$$\sigma_r = \sigma_\theta = \frac{E}{1-\nu}\frac{\nu}{R}, \quad \varepsilon_r = \varepsilon_\theta = \frac{\nu}{R},$$

$$q''_r = q''_\theta = -\frac{E\varepsilon_0^*}{2(1-\nu)}[(1+\nu)\frac{R_1^2}{R^2} + 1 - \nu],$$

$$e_r = e_\theta = \frac{1}{2}\varepsilon_0^*(1+\nu)(1 - \frac{R_1^2}{R^2}), \ 0 \le r \le R_1,$$

$$q''_{r,\theta} = -\frac{E\varepsilon_0^* R_1^2}{2R^2(1-\nu)}[1 + \nu \pm (1-\nu)\frac{R^2}{r^2}],$$

$$e_{r,\theta} = -\frac{\varepsilon_0^*(1+\nu)R_1^2}{2R^2}(1 \pm \frac{R^2}{r^2}), \ R_1 \le r \le R.$$

Индексами r, θ обозначены соответственно радиальные и тангенциальные напряжения и деформации, E – модуль Юнга, ν – коэффициент Пуассона, $\varepsilon_0^* = \varepsilon_r^* = \varepsilon_\theta^*$ – первоначальные деформации в центральной зоне.

Используя данные выражения, находим значения величины $\varkappa\sigma$ и оператора $\varkappa Q_1$, фигурирующих в формуле (3.2):

$$\varkappa\sigma = \varkappa\frac{E\nu}{(1-\nu)R}, \quad \varkappa Q_1 = \frac{1}{2}\varkappa(1+\nu)(1 - \frac{R_1^2}{R^2}),$$

где

$$\varkappa = 1 \ \text{ при } \ r \in [0, R_1]; \quad \varkappa = 0 \ \text{ при } \ r \in [R_1, R].$$

Тогда

$$\sigma_0^* = \varkappa\sigma_r^* = \varkappa\sigma_\theta^* = \frac{2\varkappa R\nu E}{(1-\nu)[(1-\nu)R^2 + (1+\nu)R_1^2]}.$$

Отсюда искомое значение $\epsilon_0^* = (1-\nu)E^{-1}\sigma_0^*$. Далее получаем

$$q_r'' = q_\theta'' = -\frac{E\nu}{(1-\nu)R}, \quad 0 \le r \le R_1,$$

$$q_{r,\theta}'' = -\frac{ER_1^2\nu}{R(1-\nu)[(1-\nu)R^2 + (1+\nu)R_1^2]}[1+\nu \pm (1-\nu)\frac{R^2}{r^2}], \quad R_1 \le r \le R.$$

Таким образом, суммарные напряжения в центральной зоне равны нулю, а в кольце, окружающем эту область, получаем решение задачи Ляме для соответствующих граничных условий.

Замечание 3. При решении оптимизационных задач при мягком нагружении элементов конструкций, исследованных в примерах 2, 3 работы [1], получаются результаты, аналогичные приведенным в [1].

Литература

1. Соколов А. Г., Стружанов В. В. Об одной задаче оптимизации напряженного состояния в упругом теле // Прикладная математика и механика. 2001. Т. 65, вып. 2. С. 317–322.

2. Лурье А. И. Теория упругости. М.: Наука, 1970.

3. Михлин С. Г. Вариационные методы в математической физике. М.: Наука, 1970.

4. Канторович Л. В., Акилов Г. П. Функциональный анализ. М.: Наука, 1977.

Статья поступила 26.08.2002 г.